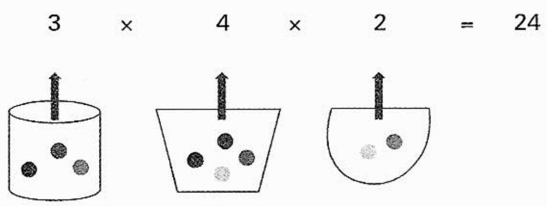
Unità 1 ELEMENTI DI ANALISI COMBINATORIA

ESERCITAZIONI

REGOLA DEL PRODOTTO

Ricordiamo che... 1



Se in un processo di scelta vi sono r processi parziali che avvengono indipendentemente uno dall'altro in modo che nel k-esimo processo vi sono esattamente n_k possibilità di scelta, allora il numero totale di possibilità di scelta sarà uguale a:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$$

QUESITI

1 Nell'esempio grafico del "Ricordiamo che..." ci sono tre urne che contengono palline di colore diverso rispettivamente in numero di 3, 4 e 2.
Seguendo la definizione di regola del prodotto completa:

«Vi sono .... processi parziali, il primo con .... possibilità di scelta, il secondo con .... possibilità di scelta e il terzo con ....».

2 Di' a quali delle seguenti situazioni può essere applicata la regola del prodotto per calcolare i possibili raggruppamenti:

a) Scelgo una pallina da un'urna che contiene 4 palline numerate, poi una seconda pallina da un'altra urna che contiene 10 palline numerate ed infine una terza pallina da un cesto contenente 24 palline numerate. Quanti possibili raggruppamenti si possono creare? ☐

b) Quattro urne contengono ciascuna tutte le lettere dell'alfabeto italiano. Estraggo una pallina da ciascuna urna per comporre una parola di senso compiuto. Quante parole si possono creare? ☐

c) Una casa produttrice di automobili produce un modello di auto in 3 tipi di motorizzazioni (benzina, diesel, ibrido), 5 colori (verde, blu, nero, bianco, rosso) e 2 tipi di interni (alcantara, pelle). Quanti modelli è possibile acquistare? ☐

3 Lancio tre volte un dado ottenendo un numero di 3 cifre. Come posso calcolare il numero di possibili risultati?

4 Con riferimento all'esempio grafico del "Ricordiamo che...", invertendo l'ordine di estrazione delle palline, cominciando dalla terza urna per passare alla seconda e poi alla prima il numero di possibilità si modifica?

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

5 Vogliamo formare una parola di quattro lettere (anche senza significato) pescando una lettera da quattro urne contenenti le 26 lettere dell'alfabeto inglese. La prima e la quarta urna contengono le 5 vocali dell'alfabeto, la seconda e la terza contengono le 21 consonanti.

Quante parole potremo formare? Quante parole nel caso volessimo escludere le doppie consonanti? Quante parole saranno simmetriche (intendendo che la prima vocale sia uguale all'ultima e le due consonanti siano uguali? (per esempio la parola "anna")?

La situazione prospettata è quella di 4 scelte successive che avvengono in maniera indipendente tra di loro (l'estrazione dalla prima urna non influenza l'estrazione dalla seconda ecc.).
Per rispondere al primo quesito, applicando la regola del prodotto, avremo dalla prima urna 5 possibilità di scelta, dalla seconda urna 21 possibilità, dalla terza urna ancora 21 possibilità ed infine 5 possibilità dalla quarta urna. Le possibilità saranno pertanto:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r = 5 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 5 = 11\,025$$

Per rispondere al secondo quesito potremo fare il seguente ragionamento: la seconda urna ci offrirà 21 possibilità; la terza urna ci offrirà una possibilità in meno in quanto, ad esempio, se dalla seconda urna abbiamo estratto la lettera *c*, dalla terza urna potremo estrarre tutte le consonanti tranne la *c*.
Le possibilità saranno quindi:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r = 5 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 5 = 10\,500$$

Per rispondere al terzo quesito potremo ragionare nel modo seguente:
- estraendo dalla prima urna avremo 5 possibilità;
- estraendo dalla seconda urna avremo 21 possibilità;
- estraendo dalla terza urna avremo solo 1 possibilità (di estrarre la stessa consonante della seconda urna);
- estraendo dalla quarta urna avremo solo 1 possibilità (di estrarre la stessa vocale della prima urna).

Le possibilità saranno quindi:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r = 5 \cdot 21 \cdot 1 \cdot 1 = 105$$

6 In un ristorante troviamo il seguente menu.
Primi piatti:
- Spaghetti alla chitarra
- Ravioli di zucca
- Zuppa di asparagi

Secondi piatti:
- Tagliata di manzo
- Spezzatino di vitello
- Sogliola alla mugnaia
- Spigola al forno

Dessert:
- Tiramisu
- Crema catalana
- Foresta nera

Supponendo di prendere sempre un piatto per portata, quanti pasti si possono fare in questo ristorante senza mangiare mai la stessa sequenza di piatti? [36]

7 Dobbiamo formare una commissione composta da un calciatore, un giocatore di pallacanestro e un giocatore di pallavolo. Per farlo dobbiamo scegliere il primo tra una squadra di 11, il secondo tra una squadra di 5, il terzo tra una squadra di 6. Quante possibilità ci sono di formare la commissione? [330]

8 Quante parole (anche senza significato ma senza ripetizioni di lettere) possono essere formate con 4 consonanti e 3 vocali in modo che ciascuna parola inizi e finisca con una consonante? [36]

9 Con riferimento all'esercizio precedente, quante parole possono essere formate potendo ripetere le lettere? [48]

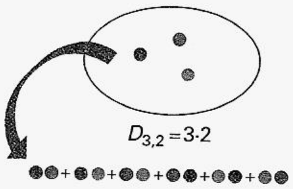
10 Quanti sono i numeri interi (che non inizino con lo 0) che si possono generare con 5 cifre in modo che nessuna cifra sia ripetuta? [27 216]

11 Con riferimento all'esercizio precedente, quante sarebbero i numeri in caso sia possibile la ripetizione delle cifre? [90 000]

12 Una signora viene urtata da un motociclo che non si ferma a soccorrerla.
La targa del motociclo era composta da due lettere e cinque numeri.
La signora ricorda che la prima lettera della targa era una D e che gli ultimi due numeri erano 2 e 7.
Un passante si ricorda che la seconda lettera era una F o una P e che il primo numero era un 4.
Quante targhe dovrebbe controllare la Polizia se volesse rintracciare l'investitore? [200]

DISPOSIZIONI SEMPLICI E CON RIPETIZIONE

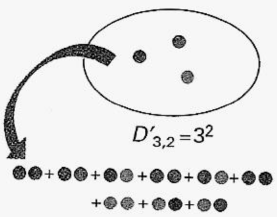
Ricordiamo che... 2



■ Dati n oggetti distinti a_1, a_2, a_3, ... a_n si dicono **disposizioni semplici** di classe k (con $k \leq n$) tutti gli aggruppamenti che si possono fare prendendo k degli n oggetti (ciascuno di questi non più di una volta per ogni gruppo), in modo che i gruppi differiscano tra loro o per qualche oggetto o per l'ordine con cui gli oggetti compaiono nel gruppo.

■ Inoltre diciamo che il numero delle disposizioni semplici di n oggetti distinti, di classe k, è uguale al prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti dei quali il primo è n e l'ultimo $n-k+1$.
Generalizzando queste considerazioni scriviamo la formula:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ \dots \ [n-(k-1)] =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ \dots \ (n-k+1)$$



Nel caso in cui un oggetto possa comparire più volte, le disposizioni saranno date da:

$$D'_{n,k} = n^k$$

QUESITI

13 Rispondi alle seguenti domande:

a) Che cosa si intende per disposizione semplice di n oggetti di classe k? Fornisci un esempio di disposizione semplice.

b) In una disposizione con ripetizione k può essere maggiore di n?

14 Estraiamo da un'urna contenente 26 lettere dell'alfabeto 5 lettere (senza reintrodurre ogni volta la lettera estratta).
Di che tipo di disposizioni si tratta?
E se reintroduciamo ogni volta la lettera estratta nell'urna?

15 Lanciamo un dado 2 volte. Quale tipo di disposizioni saranno formate volendo elencare tutti i possibili numeri di 2 cifre che potremo creare?
Calcola a mente questo numero utilizzando prima la regola del prodotto e poi la formula delle disposizioni.

16 Stabilisci quali delle seguenti disposizioni sono con ripetizione.

a) Le parole di 4 lettere che possono essere composte pigiando ogni volta a caso un qualsiasi tasto della tastiera del computer. ☐

b) Le parole di 5 lettere che possono essere formate ritagliando ciascuna lettera da un foglio che riporta l'alfabeto di 26 lettere. ☐

c) La serie di simboli croce e testa che si ottiene lanciando per 10 volte una moneta. ☐

d) I modi di comporre su una parete 3 quadri scelti tra 21 quadri di una galleria d'arte. ☐

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

17 Un codice PIN è formato da 4 numeri. Quanti sono i possibili PIN che si possono generare? Nel caso in cui volessimo che il PIN fosse formato da numeri diversi tra di loro, quante sarebbero le possibilità?

Nel primo caso siamo di fronte a disposizioni con ripetizione di 10 elementi (le cifre da 0 a 9) di classe 4 (la lunghezza del PIN). Il numero di possibili PIN sarà uguale a:

$$D'_{10,4} = 10^4 = 10\,000$$

Nel secondo caso, le disposizioni saranno senza ripetizione. Le possibilità si ridurranno pertanto a:

$$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

L'ultimo numero della serie prodotto (7) è dato da $n - k + 1$.

18 Dati tre oggetti a_1, a_2, a_3 costruisci tutte le disposizioni di classe 1, 2 e 3.

19 Date le cifre 2, 5, 7 scrivi tutti i numeri di due cifre che con esse si possono costruire senza mai usare più di una volta la stessa cifra. Quanti sono? Controlla la risposta calcolando $D_{3,2}$.

20 Otto atleti partecipano a una gara di corsa di 100 metri. Quante possibilità di composizione del podio tra i diversi atleti ci sono? Si ricorda che il podio è composto da 1° posto, 2° posto e 3° posto. [336]

21 Un'urna contiene i numeri della tombola (da 1 a 90). Estraiamo 5 numeri uno dopo l'altro senza reimmettere nell'urna ciascun numero sorteggiato.
Calcola le possibili cinquine che potranno uscire.
Calcola le cinquine nel caso in cui il numero estratto sia rimesso nell'urna dopo ogni estrazione. [5 273 912 160; 5 904 900 000]

ESERCIZIO GUIDA

22 Ad un campionato italiano di calcio partecipano 16 squadre. Quante sono le partite giocate complessivamente nel girone di andata e di ritorno?

Le partite sono tante quante le disposizioni semplici di 16 oggetti, di classe 2, e pertanto:

$$D_{16,2} = 16 \cdot 15 = 240.$$

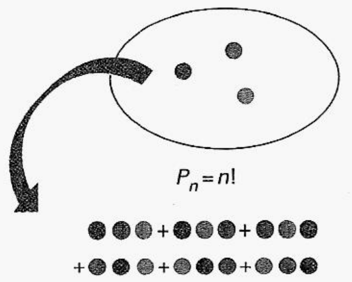
23 Nel 2011 il campionato di serie A di basket è passato da 16 a 17 squadre. Negli anni successivi si prevede di giocare un campionato a 18 squadre.
Calcola il numero di partite da giocare nei tre diversi campionati. [240; 272; 306]

24 In un campionato di pallavolo si gioca, tra andata e ritorno, ogni domenica per 34 settimane all'anno.
Quante squadre dovremo ammettere al campionato? [18]

PERMUTAZIONI SEMPLICI E CON RIPETIZIONE

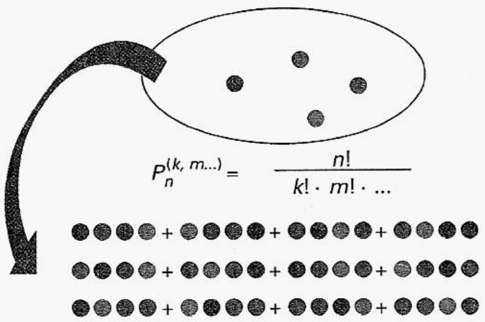
Excel

Ricordiamo che... 3



Si chiamano permutazioni di n oggetti distinti a_1, a_2, a_3, ... a_n, le disposizioni di questi oggetti di classe n. Il numero di permutazioni è dato dal prodotto dei primi n numeri naturali denominato fattoriale di n:

$$P_n = n!$$



Dati n oggetti di cui k, m, ... ripetuti, le permutazioni saranno date da:

$$P_n^{(k,m,...)} = \frac{n!}{k! \cdot m! \cdot ...}$$

QUESITI

25 Cosa si intende per permutazione di n oggetti? Fornisci un esempio.

26 Come si calcola il fattoriale di un numero n? Come si indica?

27 Quando si deve applicare la formula delle permutazioni con ripetizione?

28 Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false? **V F**

a) Il numero di permutazioni di n oggetti distinti è dato dal prodotto dei primi n numeri naturali. ☐ ☐

b) $D_{n,0} = P_n$. ☐ ☐

c) $D_{n,n} = P_n$. ☐ ☐

d) Il numero di permutazioni del nome "anna" è uguale a quello del nome "rino". ☐ ☐

e) $P_n^{(0,0,...)} = P_n$. ☐ ☐

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

29 Francesca ha prenotato 4 posti al cinema per lei e le sue 3 amiche: Viola, Giulia, Anna. I posti sono rispettivamente G4; G5; G6 e G7. Quante combinazioni possibili di posti ci sono per le 4 amiche?
Quante possibilità ci sono se si vuole evitare che Viola stia seduta accanto ad Anna?

Per chiarezza, elenchiamo tutte le possibilità di posti per le quattro amiche (indichiamo i nomi con le iniziali).

1)	G4	G5	G6	G7
	F	V	G	A
2)	G4	G5	G6	G7
	F	G	A	V
3)	G4	G5	G6	G7
	F	A	V	G
4)	G4	G5	G6	G7
	F	V	A	G
5)	G4	G5	G6	G7
	F	G	V	A
6)	G4	G5	G6	G7
	F	A	G	V
7)	G5	G6	G7	G4
	V	G	A	F
8)	G5	G6	G7	G4
	G	A	V	F
9)	G5	G6	G7	G4
	A	V	G	F
10)	G5	G6	G7	G4
	V	A	G	F
11)	G5	G6	G7	G4
	G	V	A	F
12)	G5	G6	G7	G4
	A	G	V	F
13)	G5	G4	G6	G7
	V	F	G	A
14)	G5	G4	G6	G7
	G	F	A	V
15)	G5	G4	G6	G7
	A	F	V	G
16)	G5	G4	G6	G7
	V	F	A	G
17)	G5	G4	G6	G7
	G	F	V	A
18)	G5	G4	G6	G7
	A	F	G	V
19)	G5	G6	G4	G7
	V	G	F	A
20)	G5	G6	G4	G7
	G	A	F	V
21)	G5	G6	G4	G7
	A	V	F	G
22)	G5	G6	G4	G7
	V	A	F	G
23)	G5	G6	G4	G7
	G	V	F	A
24)	G5	G6	G4	G7
	A	G	F	V

Le possibilità in totale sono quindi 24. Possiamo calcolare matematicamente queste possibilità sapendo che si tratta delle permutazioni di n elementi. In particolare si avrà:

$$P_n = P_4 = 4! = 24$$

È bene sempre ricordarsi, anche per facilitare la comprensione e la soluzione dei diversi problemi, che la formula applicata non è altro che l'estensione della regola dal prodotto.
Infatti, si avrà:

- 1° elemento → 4 possibilità;
- 2° elemento → 3 possibilità (una volta seduta la prima ragazza nel primo posto, una delle 3 ragazze rimanenti si potrà sedere al secondo posto);
- 3° elemento → 2 possibilità (una volta sedute le prime due ragazze, una delle 2 ragazze rimanenti si potrà sedere al terzo posto);
- 4° elemento → 1 sola possibilità (una volta sedute 3 ragazze all'ultima resterà solo un posto a disposizione.

Per la regola del prodotto si avrà quindi:

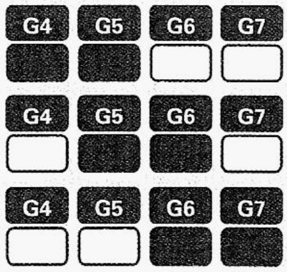
$$P_n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Per rispondere alla seconda domanda, dovremo scartare i raggruppamenti che vedono Viola e Anna una accanto all'altra. Otterremo quindi 12 possibilità:

1)	G4	G5	G6	G7
	F	V	G	A
2)	G4	G5	G6	G7
	~~F~~	~~G~~	~~A~~	~~V~~
3)	G4	G5	G6	G7
	~~F~~	~~A~~	~~V~~	~~G~~
4)	G4	G5	G6	G7
	~~F~~	~~V~~	~~A~~	~~G~~
5)	G4	G5	G6	G7
	~~F~~	~~G~~	~~V~~	~~A~~
6)	G4	G5	G6	G7
	F	A	G	V
7)	G5	G6	G7	G4
	V	G	A	F
8)	G5	G6	G7	G4
	~~G~~	~~A~~	~~V~~	~~F~~
9)	G5	G6	G7	G4
	~~A~~	~~V~~	~~G~~	~~F~~
10)	G5	G6	G7	G4
	~~V~~	~~A~~	~~G~~	~~F~~
11)	G5	G6	G7	G4
	~~G~~	~~V~~	~~A~~	~~F~~
12)	G5	G6	G7	G4
	A	G	V	F
13)	G5	G4	G6	G7
	V	F	G	A
14)	G5	G4	G6	G7
	~~G~~	~~F~~	~~A~~	~~V~~
15)	G5	G4	G6	G7
	A	F	V	G
16)	G5	G4	G6	G7
	V	F	A	G
17)	G5	G4	G6	G7
	~~G~~	~~F~~	~~V~~	~~A~~
18)	G5	G4	G6	G7
	A	F	G	V
19)	G5	G6	G4	G7
	V	G	F	A
20)	G5	G6	G4	G7
	G	A	F	V
21)	G5	G6	G4	G7
	~~A~~	~~V~~	~~F~~	~~G~~
22)	G5	G6	G4	G7
	~~V~~	~~A~~	~~F~~	~~G~~
23)	G5	G6	G4	G7
	G	V	F	A
24)	G5	G6	G4	G7
	A	G	F	V

Per arrivare alla soluzione in forma logico-matematica, possiamo tuttavia applicare ancora una volta il metodo del prodotto attraverso il seguente ragionamento.

Viola e Anna possono trovarsi sedute accanto in tre posizioni dei sedili: i due a sinistra, i due centrali o i due a destra:



In queste due poltrone, Viola ed Anna possono a loro volta sedersi in due modi diversi (Viola a destra e Anna a sinistra o viceversa).
Infine, nei due posti rimanenti, le altre due ragazze avranno 2 possibilità di sedersi. Si avrà quindi:

$$\text{totale possibilità} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

30 Quante permutazioni possono essere fatte delle 5 lettere a, c, f, r, s? [120]

31 Con riferimento all'esercizio precedente, quante permutazioni iniziano con la lettera c?
E quante iniziano con la lettera f e finiscono con la lettera r? [24; 6]

32 Quanti anagrammi (anche senza significato) possiamo generare dalla parola "lancio"? [720]

33 Quanti anagrammi possono essere generati dalle lettere della parola "presto"? Quanti sono gli anagrammi che iniziano con la lettera s e finiscono con la lettera E?
E quanti quelli con la lettera p in posizione dispari? [362 880; 24; 360]

ESERCIZIO GUIDA

34 Quanti possibili anagrammi (anche senza significato) possiamo creare dai nomi "tina" e "anna"?

Gli anagrammi di "tina" si calcoleranno come permutazioni delle 4 lettere, ottenendo:

$$P_4 = 4! = 24$$

Gli anagrammi di "anna" si calcoleranno come permutazioni di n lettere di cui 2 lettere ripetute 2 volte:

$$P_4^{(2,2)} = \frac{4}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

35 Quanti anagrammi (anche senza significato) possiamo generare dalla parola "futuro"? [360]

36 Con riferimento all'esercizio precedente, vogliamo scartare gli anagrammi dove compaiono due lettere identiche consecutive. Quanti saranno in questo caso gli anagrammi? [240]

37 Marco, Davide, Francesca e Giulia vogliono fondare un'azienda che restaura barche. Il nome della soro società sarà dato dall'anagramma delle loro iniziali seguito dalla parola "mare". Quanti possibili nomi potrebbe avere l'azienda? [24]

38 Con riferimento all'esercizio precedente, Donatella ha sostituito Francesca che ha rinunciato all'impresa. Quanti nomi sono ora possibili per l'azienda? [12]

39 I giocatori di una squadra di pallavolo sono 6; in quanti modi diversi possono disporsi in campo? [720]

40 Con tre cifre, per esempio 1, 2, 3, quanti numeri di tre cifre si possono scrivere senza mai usare in un numero più di una volta la stessa cifra? Scrivi questi numeri. [6]

41 Dati tre oggetti a_1, a_2, a_3 costruisci le loro permutazioni. Quante sono?

42 Se in una squadra di calcio gli 11 giocatori sapessero giocare in tutti i ruoli, quante possibili disposizioni in campo si potrebbero fare?

43 Esegui le seguenti operazioni:

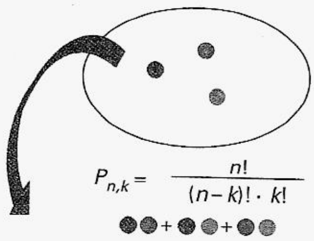
$\frac{8!}{7!}$; $\frac{9! \cdot 2!}{7! \cdot 3!}$. [8; 24]

44 Esegui le seguenti operazioni:

$\frac{n!}{(n-1)!}$; $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$. [n; $n-1$]

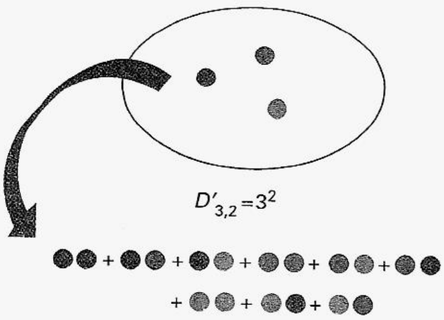
COMBINAZIONI SEMPLICI E CON RIPETIZIONE

Ricordiamo che... 4



Si chiamano **combinazioni semplici** di n oggetti distinti a_1, a_2, a_3, ... a_n, di classe k (con $k \leq n$), tutti gli aggruppamenti che si possono fare prendendo di volta in volta k oggetti (ciascuno non più di una volta per gruppo), in modo che i gruppi differiscano tra loro per qualche oggetto (e non per l'ordine).
Il calcolo delle combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$



Nel caso in cui gli oggetti possano essere ripetuti, il numero di combinazioni di n oggetti di classe k è dato da:

$$C'_{n,k} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{k!}$$

QUESITI

45 Che cosa si intende per combinazioni semplici di n oggetti di classe k? Fornisci un esempio di combinazione semplice.

46 Che cosa si intende con l'espressione $C_{n,k}$? Fornisci un esempio.

47 Che cosa si intende per combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k? Fornisci un esempio.

48 Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false? **V F**

a) Le combinazioni semplici di n oggetti di classe k possono essere in numero maggiore delle disposizioni semplici degli stessi n oggetti, sempre di classe k. ☐ ☐

b) Ogni combinazione di n oggetti di classe k genera $k!$ disposizioni degli stessi n oggetti, sempre di classe k. ☐ ☐

c) $C'_{n,k} < C_{n,k}$; ☐ ☐

d) $C_{n,n} = 1$. ☐ ☐

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

49 Nel gioco del poker a un giocatore vengono assegnate 5 carte prese a caso da un mazzo da 52. Quante sono le differenti combinazioni di carte che un giocatore può avere in mano?

In questo caso, l'ordine delle carte non ha importanza. Il gioco infatti si basa sui tipi di "punti" che si possono ottenere dalle combinazioni delle carte.
Si tratta quindi di combinazioni di 52 elementi di classe 5:

$$C_{52,5} = \frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} = 2\,598\,960.$$

50 Quante sono le combinazioni semplici di 5 oggetti di classe 3?

51 Un campionato di calcio è organizzato a gironi di qualificazione di 4 squadre seguiti poi da scontri ad eliminazione diretta. Per comporre il primo girone si procede a un sorteggio tra le 24 squadre partecipanti. Quante differenti possibilità ci sono di composizione del primo girone?

52 Durante un esame, uno studente deve rispondere a 6 domande a scelta tra 9 proposte. Quante possibilità di scelta esistono per lo studente? [84]

53 Marco e Giulia si sposano e per il pranzo di matrimonio hanno la possibilità di invitare 45 persone. La lista dei possibili invitati è di 62 persone. Tra quante possibili liste di invitati possono scegliere Marco e Giulia? [$7{,}396 \cdot 10^{14}$]

54 Sette amici si ritrovano dopo un po' di anni. Quante strette di mano ci saranno se ciascuno di loro stringerà la mano a tutti gli altri (solo una volta)? [21]

55 All'inizio di una riunione aziendale i 9 partecipanti si scambieranno i biglietti da visita. Calcola quanti biglietti da visita verranno scambiati in totale. [72]

56 Laura deve andare in vacanza e vuol portare con sé 4 libri da leggere. Tra quelli che non ha ancora letto a casa ha 4 romanzi e 6 libri di racconti.
Quante diverse possibilità di scelta ha Laura se vuole portare con sé almeno un romanzo? [195]

57 Abbiamo 12 libri che vogliamo distribuire a 4 anziani in modo che ogni anziano abbia 3 libri.
Quante differenti possibilità ci sono di distribuire i libri? [369 600]

58 Un'amministrazione comunale deve essere composta da 8 assessori che vanno scelti tra i 12 consiglieri di maggioranza: 6 uomini e 6 donne.
Quante possibilità ci sono di formare la giunta se non vi sono restrizioni di alcun tipo?
E nel caso in cui la giunta debba essere divisa equamente tra donne e uomini? [495; 225]

59 Un comitato scientifico di una rivista deve essere formato da 4 persone che vanno scelte tra 7 fisici e 7 matematici. Quante possibilità ci sono di comporre il comitato scientifico se si vuole avere lo stesso numero di fisici e di matematici nel comitato? [441]

SEGUI LA TRACCIA

60 Determina quante sono le combinazioni con ripetizione di 3 oggetti di classe 5.

Applicando la formula ottieni:

$$C'_{3,5} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3+5-1)}{5!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{5!} = \ldots$$

61 Calcola le combinazioni con ripetizione di 4 oggetti di classe 6 [84]

62 Vogliamo comporre un vassoio di 6 paste prendendole da un bancone di pasticceria che dispone di 10 qualità diverse di paste (tutte disponibili in quantità praticamente illimitata). Quante combinazioni di vassoi sono possibili? [5005]

63 Con riferimento all'esercizio precedente, quante diventano le combinazioni se il vassoio è da 12 paste? [12 376]

64 Nel sistema binario (0; 1) utilizzato dai computer, un byte è definito come una serie di 8 bit. Ad esempio: 00011000 è un byte.

a) Quanti bytes contengono 2 volte la cifra 0?

b) Quanti bytes contengono 6 volte la cifra 1?

c) Quanti bytes contengono almeno 6 volte la cifra 1?

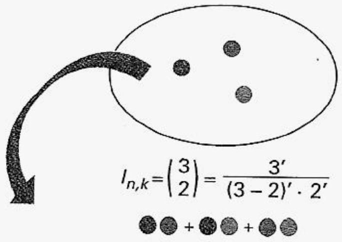
[**a)** 28; **b)** 28; **c)** 37]

BINOMIO DI NEWTON

GeoGebra

Ricordiamo che...

5



La potenza n-esima di un binomio può essere calcolata, usando la regola del **binomio di Newton**, nel seguente modo:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

dove:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

QUESITI

65 Completa le seguenti affermazioni.

a) Il numero intero $C_{n,k}$ viene anche indicato con il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge .... e viene chiamato ....

b) L'uguaglianza $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ sta ad indicare che il numero delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k ....

66 Illustra il procedimento per il calcolo della potenza n-esima di un binomio.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

67 Svolgiamo la seguente potenza:

$$(a-2b)^5.$$

Applicando ancora la formula sopra ricordata, scriviamo:

$$(a-2b)^5=\sum_{0}^{5}{}_k\binom{5}{k}a^{5-k}\cdot(-2b)^k=$$

$$=\binom{5}{0}a^5+\binom{5}{1}a^4(-2b)+\binom{5}{2}a^3(-2b)^2+\binom{5}{3}a^2(-2b)^3+$$

$$+\binom{5}{4}a(-2b)^4+\binom{5}{5}(-2b)^5=$$

$$=a^5-10a^4b+40a^3b^2-80a^2b^3+80ab^4-32b^5.$$

68 Sviluppa le seguenti potenze mediante la formula del binomio di Newton:

$(1+x)^6$; $(2a-b)^5$; $(x+y)^8$.

69 Sviluppa le seguenti potenze: $\left(1-\frac{a}{2}\right)^5$; $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}b\right)^6$; $(1-a^2)^7$.

70 Sviluppa le seguenti potenze: $(a^2-b^3)^4$; $(2a^3-b^2)^5$; $(\sqrt{2}a-b)^6$.

71 Calcola il valore della seguente espressione: $(a-\sqrt{2})^5-(a+\sqrt{2})^5$.

72 Calcola il valore della seguente espressione: $(\sqrt{ab}+2)^6+(\sqrt{ab}-2)^6$.

73 Qual è il coefficiente del 7° termine dello sviluppo di $(a+b)^9$?

74 Qual è il 5° termine dello sviluppo di $(2a-b)^7$?

75 Qual è il 3° termine dello sviluppo di $(x^2+3y)^5$?

76 Risolvi l'equazione: $\binom{x}{5}=\binom{x}{3}$. [$x=8$]

77 Risolvi l'equazione: $\binom{x}{3}=2\binom{x-1}{2}$. [$x=6$]

78 Risolvi l'equazione: $\binom{x}{2}=\binom{x-1}{1}$. [$x=2$]

79 Risolvi l'equazione: $\binom{x-1}{2}=\binom{x-2}{3}$. [Impossibile]

80 Dimostra l'identità: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$.

81 Dimostra che: $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$.

82 Sia n un numero naturale. Verifica l'identità:

$$\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-1}{n-k-1}$$

con k numero naturale minore o uguale ad n.

83 Verifica che:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

Deduci dalla relazione precedente una regola ricorsiva per ricavare i valori dei successivi coefficienti binomiali partendo dal valore del primo (che tra l'altro è sempre uguale ad 1).

LEARNING MATHS IN ENGLISH

CLIL

Competenza Saper apprendere e comunicare in una lingua straniera

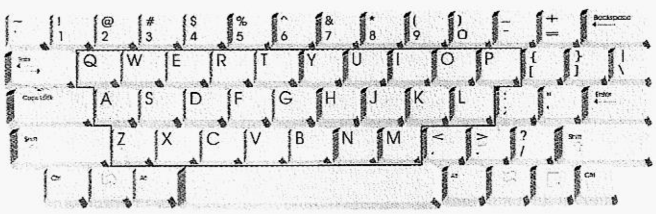
QUESTIONS

Answer the question

84 The picture below represents a QWERTY keyboard (from the first six letters on the right top corner) where you can find 26 letters of alphabet. This is the most common layout of a typewriter or computer keyboard. This layout was created at the end of the 19^{th} century by a newspaper editor from Milwaukee: Christopher Latham Sholes.

This layout was particularly successful because, with the Latin alphabet, hands could alternate: while one hand is typing a letter, the other hand can get in the right position to type the next letter.

How can you calculate how many different layouts you can possibly think of?



ACTIVITIES

85 How many permutations are there in the 7 letters a, c, f, r, t, y, z?

86 And how many are starting with the letter a?

87 And how many start with the letter c and end with the letter y?

88 In how many ways can 6 people seat around a round table?

Focus Modelli

avfe mq azqlfq?

Competenza Imparare a matematizzare situazioni e contesti reali
Competenza Saper analizzare una classe di fenomeni con l'opportuno modello matematico

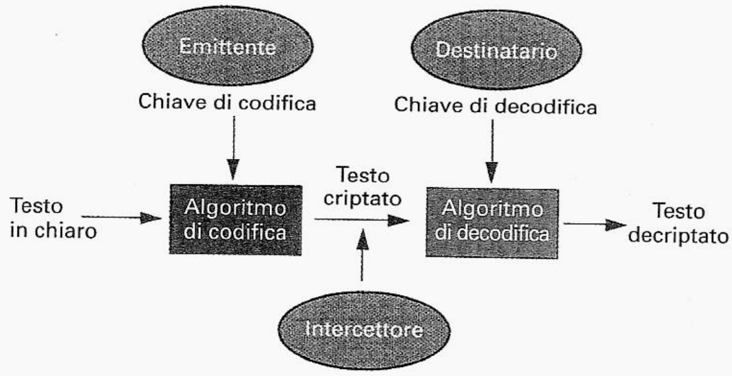
■ MATEMATICA COMBINATORIA E CRITTOLOGIA

Uno dei campi di applicazione della matematica combinatoria è quello della crittologia. Il termine significa "parola nascosta" e indica una disciplina che si occupa delle comunicazioni segrete.
La crittologia cerca di garantire nel migliore dei modi possibili uno scambio di informazioni riservate in maniera sicura su un canale di comunicazione pubblico in modo che il messaggio inviato da un emittente raggiunga il destinatario senza correre il rischio di essere intercettato o modificato da un "terzo incomodo".
Una crittografia è tanto più efficace quanto minore è la probabilità di decriptazione del codice da parte dell'intercettore. Si tratta quindi in sostanza di "raggruppare" gli elementi del messaggio origi-

nale in un modo che sia solo una delle moltissime possibilità di raggruppamento. Per questo motivo l'analisi combinatoria è di grande aiuto in questa disciplina.

1. Modello crittografico base

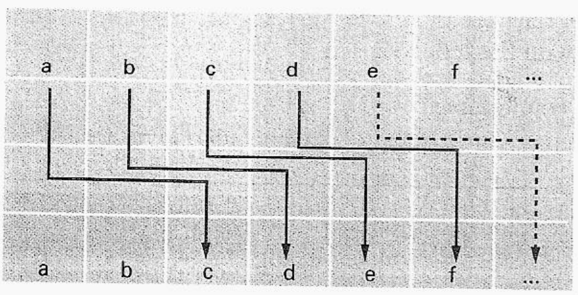
Ci sono diversi modelli crittografici. Il più elementare è quello caratterizzato dal processo illustrato dalla figura seguente.



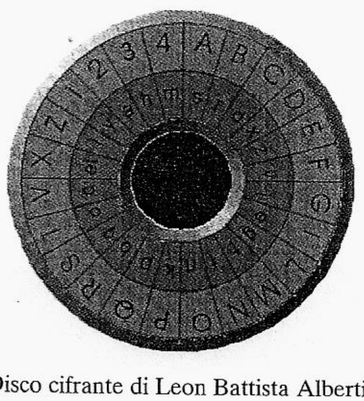
In questo modello un testo originale (in chiaro) viene criptato dall'emittente attraverso un algoritmo di codifica che utilizza una determinata chiave.
Il testo viene trasmesso in maniera pubblica (messo viaggiatore, telefono, posta, internet ecc.). Il destinatario riceve il messaggio e, utilizzando una chiave, lo decodifica ottenendo il testo originale dell'emittente.

2. Il cifrario di Cesare

Uno dei primi utilizzi della crittologia risale al cifrario di Cesare, un cifrario a sostituzione monoalfabetica in cui le lettere del testo in chiaro sono sostituite nel testo cifrato dalle lettere che si trovano in un determinato numero di posizioni dopo nell'alfabeto. Lo schema è quindi il seguente:



Ad esempio, supponiamo di voler comunicare la frase: "attaccate il nemico" utilizzando un alfabeto cifrato traslato di 3 posizioni. Otterremo la frase: dzzdffdzh no qhpnfr
In apparenza il testo cifrato sembra assolutamente impossibile da comprendere. In realtà, il cifrario di Cesare è uno strumento piuttosto rudimentale e il codice è facile da "rompere". Essendo le lettere dell'alfabeto cifrato disposte nello stesso ordine di quello sorgente, vi sono solo quindi tanti possibili alfabeti cifrati quante le lettere dell'alfabeto. Per tentativi è possibile quindi rompere il codice facilmente.
Una versione del cifrario di Cesare fu introdotta da Leon Battista Alberti con il suo disco cifrante composto da due dischi concentrici. Il primo disco (esterno) riportava l'alfabeto in chiaro di 20 lettere e 4 numeri; il secondo disco (interno) lo stesso alfabeto e lettere ma in forma disordinata.
In questo caso i possibili alfabeti cifrati sono in numero molto maggiore, precisamente 24! in quanto si tratta di calcolare il numero di permutazioni di un sistema di 24 simboli.
Si tratta di un numero molto grande ($6{,}2 \cdot 10^{23}$); cercare di rompere il codice solo per tentativi sarebbe impossibile.

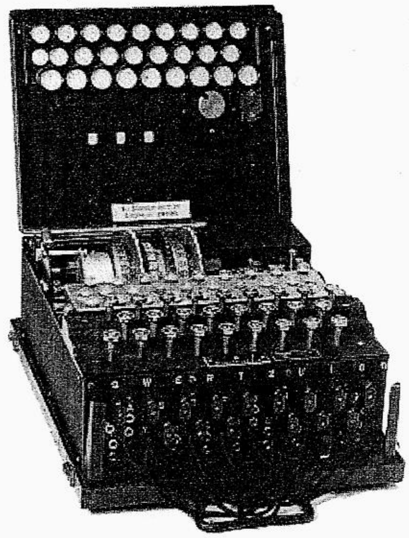


Disco cifrante di Leon Battista Alberti.

Tuttavia, applicando tecniche di analisi del linguaggio e di analisi combinatoria, è possibile ridurre il numero di tentativi e rendere possibile la rottura del codice. Ad esempio possiamo dire che la presenza di doppie indica con tutta probabilità che si tratta di una consonante, alcuni accostamenti sono nella lingua più probabili di altri ecc.

3. La macchina da scrivere Enigma

Nella storia si sono succeduti molti tipi di cifrari sempre più sofisticati. Un altro celebre esempio è rappresentato dalla macchina da scrivere Enigma, utilizzata dalle forze armate tedesche durante il periodo nazista nella seconda guerra mondiale.
Su questa macchina si poteva battere un testo come su una normale macchina da scrivere ma consentiva di utilizzare un alfabeto cifrato secondo determinati criteri. Si potevano cifrare messaggi oppure inserire i messaggi cifrati e ottenere il messaggio originale.
La macchina fu ritenuta infallibile per molti anni ma alcuni matematici riuscirono a decrittare i messaggi. Tra questi matematici figura Alan Turing, uno dei padri dell'informatica che, con l'aiuto di uno dei primi computer, riuscì a velocizzare i calcoli di decodifica.
La decrittazione dei messaggi dei nazisti consentì alle forze alleate di accedere a moltissime informazioni fondamentali per la vittoria nel conflitto.
I procedimenti moderni di crittografia sono estremamente più sofisticati e sempre più difficili da decriptare. Tuttavia anche chi lavora alla decriptazione (sia legalmente sia, come gli hackers, illegalmente) compie costantemente progressi, soprattutto con l'aumentare della capacità di calcolo.



La macchina Enigma utilizzata dai nazisti.

Applica il modello

ESERCIZIO GUIDA

89 Costruiamo con il foglio elettronico un algoritmo che replichi il cifrario di Alberti e che "traduca" il nostro messaggio nel messaggio cifrato. Vogliamo anche mettere a disposizione del destinatario un foglio elettronico che sia in grado di decriptare il messaggio.
La figura 1 ci mostra il risultato del foglio elettronico per l'algoritmo di codifica.

La procedura che possiamo seguire è la seguente (non è l'unica possibile).
- Per semplicità costruiremo l'algoritmo per un testo di massimo 23 caratteri.
- Creiamo una tabella (A7 : B30) che riporta l'alfabeto in chiaro e l'alfabeto criptato (che è stato generato casualmente attraverso la funzione casuale(). Includiamo anche una casella vuota in cui inseriremo uno spazio (B30 e C30).
- In una casella (nel nostro caso la B3) inseriamo il testo da criptare.
- Nella colonna E riportiamo i numeri interi da 1 a 23 (lunghezza massima del testo) che ci serviranno per la formula del punto successivo.
- Nella colonna F scomponiamo la frase del testo da criptare in singoli caratteri. Possiamo usare questo utilizzando la funzione STRINGA.ESTRAI che restituisce un numero specifico di caratteri da una stringa di testo iniziando dalla posizione specificata.

Quindi scriveremo per la prima casella: =STRINGA.ESTRAI(B$3;E9;1), che significa estrai dalla cella B3 la stringa nella posizione definita dal numero in colonna E e lunga 1). Il risultato sarà di scrivere il testo in forma verticale con lettere separate e spazi.

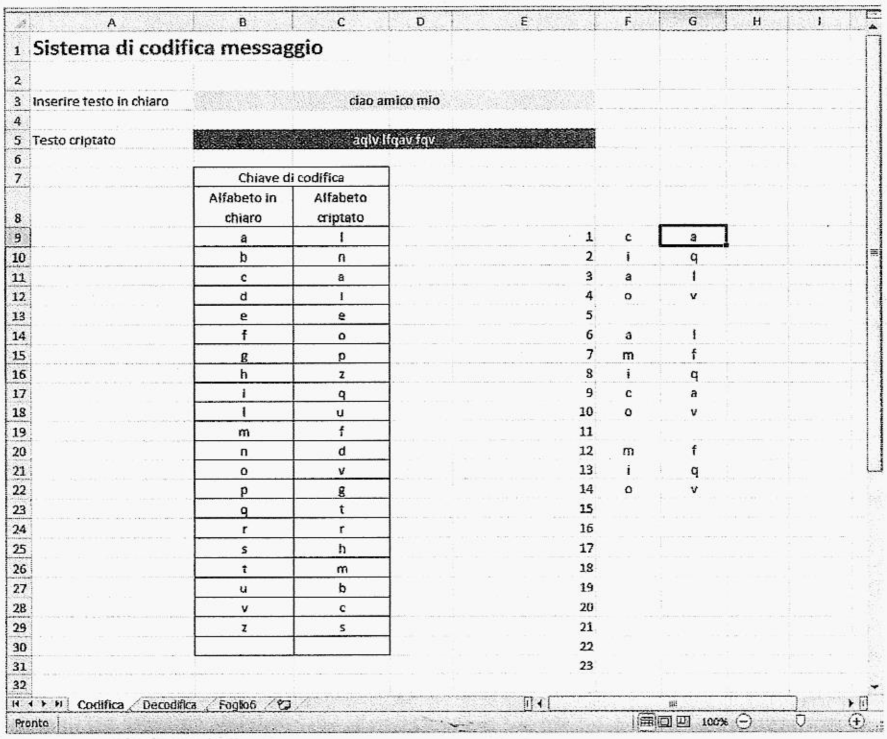


Figura 1

▪ Nella colonna G andremo a determinare le lettere corrispondenti dell'alfabeto cifrato. Utilizzeremo la formula CERCA.VERT inserendo, ad esempio, nella prima cella:
=SE(F9<>" ";CERCA.VERT(F9;$B$9:$C$30;2;FALSO);" "),
che significa: se il contenuto nella cella a sinistra è diverso da vuoto, allora cerca nella tabella F9:C30 il carattere contenuto nella cella e restituisci il carattere della seconda colonna della tabella. In pratica, nell'esempio riportato, la funzione cerca il carattere "c" nella colonna B e restituisce il carattere "a".
▪ Nella cella B5 ricostruiamo il testo attraverso la funzione CONCATENA inserendo:
=CONCATENA(G9;G10;G11;G12;G13;G14;G15;G16;G17;G18;G19;G20;G21;G22;G23;G24;G25;G26;G27;G28;G29;G30;G31)

In questo caso il testo "ciao amico mio" viene criptato in "aqlv lfqav fqv".
Ovviamente possiamo usare il foglio elettronico per inserire qualsiasi testo alfabetico e criptarlo automaticamente. Ora possiamo inviare il nostro testo (immaginiamo via e-mail, sms oppure messenger) al destinatario.
Per decodificare il messaggio potremo creare un altro foglio elettronico.

90 Con riferimento all'esercizio precedente, calcola quanti sono i possibili alfabeti cifrati (mantenendo lo spazio come elemento in chiaro, cioè dove spazio si traduce in spazio anche nel messaggio criptato).

91 Marta ha completamente dimenticato il PIN del suo cellulare. Il PIN è di 4 numeri. Quanti sono i possibili codici PIN?

92 Con riferimento all'esercizio precedente, quanti sono i possibili PIN se Marta si ricorda che le cifre sono un anagramma del suo anno di nascita: 1993?

93 Marco deve scegliere una password di 4 lettere (alfabeto 23 lettere) e 3 numeri (in qualsiasi ordine). Quali sono le possibili password a disposizione?
E nel caso in cui la password sia "case sensitive" (cioè sia considerata diversa a seconda che i caratteri siano maiuscoli o minuscoli)?

94 Costruisci con il foglio elettronico un algoritmo di criptaggio di numeri di 5 cifre:

- utilizzando un cifrario come quello di Cesare traslato di 3 cifre;
- utilizzando un cifrario di Alberti.

Calcola per ambedue i casi il numero di possibili cifrari che si possono prevedere.

Riepilogo e potenziamento

95 Se il campionato italiano di serie A fosse giocato da 20 squadre rappresentanti le 20 regioni italiane, basterebbero le 52 domeniche di un anno per svolgerlo completamente nel girone di andata e di ritorno? Perché?

96 Con 5 diverse lettere dell'alfabeto quante parole di 4 lettere (anche prive di significato) si possono costruire senza usare mai la stessa lettera più di una volta? [120]

97 Con 5 diverse lettere dell'alfabeto quante parole (anche prive di significato) si possono costruire usando sempre tutte le lettere e senza usare mai la stessa lettera più di una volta? [120]

98 Quanti ambi si possono fare con i 90 numeri del lotto? [4005]

99 Quante cinquine si possono fare con i 90 numeri del lotto? [43 949 268]

100 In quanti modi si possono sedere 7 invitati a una tavola rotonda nel caso in cui:

a) ciascuno possa sedersi dove vuole;
b) due persone in particolare non siedano l'una accanto all'altra. [720; 480]

101 Determina il valore numerico dei seguenti simboli:

$D_{5,2}$; $D_{7,3}$; $C_{5,1}$; $C_{8,5}$; $7!$; P_5; $\frac{8!}{5!}$; $\frac{0!}{3!}$;

$D'_{3,2}$; $D'_{2,3}$; $P_7^{(3;1)}$; $P_7^{(2;2;3)}$.

[20; 210; 5; 56; 5040; 120; 336; $\frac{1}{6}$; 9; 8; 4; 210]

102 Ripeti l'esercizio precedente supponendo di poter ripetere le cifre e controlla la risposta calcolando il valore di $D'_{3,2}$. [9]

103 Calcola il valore del rapporto $D'_{4,2}/D_{4,2}$. [4/3]

104 Quanti anagrammi si possono fare, anche se privi di significato, delle parole «arte» e «lettera»? [24; 1260]

105 Un campionato di calcio è organizzato in 4 gironi di qualificazione di 4 squadre, seguiti poi da scontri ad eliminazione diretta. Si estraggono prima le 4 squadre del primo girone, poi le squadre del secondo girone e così via.
Quante sono in totale tutte le possibilità di formazione dei 4 gironi? [63 063 000]

Approfondimento

106 Quanti triangoli si possono disegnare congiungendo a tre a tre 4 punti di un piano dei quali mai tre siano allineati? Costruiscili. [4]

107 Quanti triangoli si possono fare congiungendo a tre a tre 5 punti di un piano dei quali mai tre siano in linea retta? Costruiscili. [10]

108 Rappresenta graficamente in un piano cartesiano la funzione $D_{5,k}$ al variare di k da 1 a 5.

109 Rappresenta graficamente per interpolazione su un piano cartesiano la funzione:

$$Y = C'_{4,x} \text{ (con } x \text{ numero intero} > 0)$$

AUTOVERIFICA DI FINE SEZIONE

Test

Competenza **Sapere ciò che si è appreso e ciò che c'è ancora da apprendere**

QUESITI

1 Stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere.

a) Le disposizioni di classe 1 sono sempre tante quanti sono gli oggetti dati. ☐

b) Se k è uguale ad n, il numero di disposizioni semplici di n oggetti di classe k è $n!$ ☐

c) Le disposizioni di un gruppo di n oggetti tra i quali ci sono oggetti uguali tra loro si dicono disposizioni con ripetizione. ☐

d) Nello sviluppo del binomio di Newton, i termini equidistanti dagli estremi hanno coefficienti uguali. ☐

2 Completa le seguenti frasi.

a) Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti ....., di classe k, è uguale al ..... di k numeri interi consecutivi decrescenti dei quali il primo è n e l'ultimo è ....

b) Se nel formare i gruppi delle disposizioni si conviene di poter ripetere in uno stesso gruppo un medesimo oggetto più di una volta, si dice che si hanno delle ...... In tal caso k potrà essere ...... di n.

3 Rispondi ai seguenti quesiti.

a) Quante possibili coppie ordinate di numeri si possono ottenere lanciando 2 dadi? (per coppie ordinate si intendono le coppie formate da un numero per il primo dado e un numero per il secondo dado). Quante sarebbero le coppie se non si facesse caso all'ordine?

b) Volendo organizzare una lotteria tra 100 partecipanti per estrarre 3 viaggi a Londra, calcola a mente il numero delle possibili terne di vincitori.

c) Con riferimento al quesito precedente, quante sarebbero le possibili terne ordinate di vincitori nel caso si volessero estrarre 1 viaggio a Sydney, 1 a New York e uno a Londra?

d) In un'urna ci sono 6 palline di diverso colore: 1 rossa, 2 blu, 2 gialle e 1 nera.
Si estraggono a una a una le palline, disponendole in fila e ottenendo una sequenza (per esempio: gialla; blu; rossa; blu; gialla; nera).
Calcola a mente quante sono le possibili sequenze di palline che possono essere estratte.

ESERCIZI

4 Rappresenta in un piano cartesiano la funzione P_n al variare di n da 1 a 5.

5 Date le cifre 1, 5, 8, scrivi tutti i numeri di due cifre che con esse si possono costruire senza mai usare più di una volta la stessa cifra. Quanti sono? Controlla la risposta calcolando il valore di $D_{3,2}$.

6 Quanti triangoli si possono fare congiungendo a tre a tre 7 punti di un piano dei quali mai tre siano in linea retta?

7 Sviluppa il binomio:

$$\left(2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5.$$